Toets Discrete Structuren

woensdag 29 januari 2003, 14 - 16 uur

Elke opgave levert maximaal 10 punten op. Het cijfer is gelijk aan (p/10) + 1, afgerond op gehele en halve waarden, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is. Een 5 of hoger levert vrijstelling bij het tentamen van maart 2003 voor de stof van de eerste 4 hoofdstukken.

NB. Beargumenteer je antwoorden.

1. Zij gegeven drie verzamelingen A, B, C. Teken de Venn-diagrammen van de verzamelingen $A \oplus (B \cup C)$ en $(A \oplus B) \cup C$.
   Laat door geschikte keuze van A, B en C zien dat

   $$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup C$$

   niet algemeen geldt.

2. Bewijs **mbv. een lineair geannoteerd bewijs** dat de formule

   $$(p \wedge (q \to r)) \leftrightarrow ((p \to q) \to (p \wedge r))$$

   een tautologie is.

3. Beschouw de volgende uitspraak:

   > Als je in Groningen woont en Informatica studeert, dan word je rijk of je bent niet hebzuchtig.

   a. Vertaal deze uitspraak in een propositionele formule (die we A zullen noemen). Gebruik daarbij de propositionele variabelen g, i, r, h.
   b. Geef de contrapositie B van A.
   c. Geef de converse C van A.
   d. Als A waar is, is B dan waar? en C? Beargumenteer!

4. Bewijs:

   > de som van een rationaal en een irrationaal getal is irrationaal.

5. De relatie $\sim$ op $N \times N$ is gedefinieerd door: $(m, n) \sim (k, l)$ dan en slechts dan als $m + l = n + k$.
   Bewijs dat $\sim$ een equivalentie-relatie is.

6. Geef, voor de equivalentie-relatie $\sim$ gedefinieerd in de vorige opgave, de equivalentieklassen aan waar resp. (0,0), (1,3) en (4,6) in zitten.

7. Bewijs met volledige inductie over N:

   $$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$$

8. a. Zij gegeven de loop `while g do S`. Wat is de definitie van een invariant van deze loop?
   b. Beschouw het volgende programmafragment (m, n zijn gehele getallen):

   ```
   while  0 < n  do
      m := m - 1
      n := n + 1
   ```

   Laat zien dat $m + n = 53$ een invariant is.

9. Zij $s(n)$ ($n \in N$) een rij getallen. Wat is de definitie van $s(n) = O(n^2)$? En van $s(n) = \Theta(n)$?

1.	$\neg\neg p \Longleftrightarrow p$	double negation
2a.	$(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$	commutative laws
b.	$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$	
c.	$(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow (q \leftrightarrow p)$	
3a.	$[(p \vee q) \vee r] \Longleftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$	associative laws
b.	$[(p \wedge q) \wedge r] \Longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$	
4a.	$[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$	distributive laws
b.	$[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	
5a.	$(p \vee p) \Longleftrightarrow p$	idempotent laws
b.	$(p \wedge p) \Longleftrightarrow p$	
6a.	$(p \vee \mathbf{0}) \Longleftrightarrow p$	identity laws[1]
b.	$(p \vee \mathbf{1}) \Longleftrightarrow \mathbf{1}$	
c.	$(p \wedge \mathbf{0}) \Longleftrightarrow \mathbf{0}$	
d.	$(p \wedge \mathbf{1}) \Longleftrightarrow p$	
7a.	$(p \vee \neg p) \Longleftrightarrow \mathbf{1}$	
b.	$(p \wedge \neg p) \Longleftrightarrow \mathbf{0}$	
8a.	$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	DeMorgan laws
b.	$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	
c.	$(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$	
d.	$(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$	
9.	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	contrapositive
10a.	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$	implication
b.	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$	
11a.	$(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$	
b.	$(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$	
12a.	$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$	
b.	$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \Longleftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$	
13.	$(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$	equivalence
14.	$[(p \wedge q) \rightarrow r] \Longleftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$	exportation law
15.	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge \neg q) \rightarrow \mathbf{0}]$	reductio ad absurdum

16.	$p \Longrightarrow (p \vee q)$	addition
17.	$(p \wedge q) \Longrightarrow p$	simplification
18.	$(p \rightarrow \mathbf{0}) \Longrightarrow \neg p$	absurdity
19.	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \Longrightarrow q$	modus ponens
20.	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Longrightarrow \neg p$	modus tollens
21.	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \Longrightarrow q$	disjunctive syllogism
22.	$p \Longrightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$	
23.	$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Longrightarrow (p \leftrightarrow r)$	transitivity of $\leftrightarrow$
24.	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Longrightarrow (p \rightarrow r)$	transitivity of $\rightarrow$ *or* hypothetical syllogism
25a.	$(p \rightarrow q) \Longrightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee r)]$	
b.	$(p \rightarrow q) \Longrightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)]$	
c.	$(p \rightarrow q) \Longrightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	
26a.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Longrightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$	constructive dilemmas
b.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Longrightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$	
27a.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Longrightarrow [(\neg q \vee \neg s) \rightarrow (\neg p \vee \neg r)]$	destructive dilemmas
b.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Longrightarrow [(\neg q \wedge \neg s) \rightarrow (\neg p \wedge \neg r)]$	

28a.	$\neg\mathbf{1} \Longleftrightarrow \mathbf{0}$	**0-1-wetten**
b.	$\neg\mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{1}$	
29a.	$(p \wedge (p \vee q)) \Longleftrightarrow p$	absorptie
b.	$(p \vee (p \wedge q)) \Longleftrightarrow p$	